アノマリー入門と低次元系の物理

東大・理　藤川　和男

1. はじめに

研究会の世話人の人から量子異常（アノマリー）とは何かを専門外の人に解説することと、できれば物性物理とか次元の低い系への応用の実例を説明するようにとの依頼をうけました。しかし、正直に言って私は物性物理への応用を過去に考えた経験がありませんので、応用に関する部分は例えば石川健三さんとか静谷謙一さんにお聞き頂くことにしまして、ここでは量子異常とは何かということと特にその歴史的な由来を簡単に解説したいと思います。

量子異常は歴史的には１９４９年の福田博、宮本米二両氏の研究と当時プリンストン高等研究所にいた J. Steinberger の研究にその端緒を発する。しかし、その本当の物理的意味の明確な理解は、１９６０年代末のパイ中間子の本質的な理解を待って初めて可能となった。以下で説明するように、量子異常は場の理論における発散の問題と密接に関係しているが発散とは本質的に異なる。強いて言えば、条件集束する級数の和の計算が量子異常の直感的な理解と結びついていると言える。

2.Noether の定理

一般に物理理論がある対称性をもっているときには、その系にはカレント（電流の概念を一般化したもの）が定義され、そのカレントは保存する。対称性があるということは、その系を記述するラグランジアンがある連続変換の下で形を変えないこととして定式化される。たとえば、ポテンシャル中の Schroedinger 方程式を与える作用は

$$S=\int\psi^{*}[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^{2}}{2m}(\frac{\partial}{\partial x^{k}})^{2}-V]\psi d^{3}xdt \tag{1}$$

で与えられるが、この作用はαを定数として

$$\begin{aligned}\psi(\overrightarrow{x},t)&\rightarrow\psi'(\overrightarrow{x},t)=e^{i\alpha}\psi(\overrightarrow{x},t)\\ \psi(\overrightarrow{x},t)^{*}&\rightarrow\psi'(\overrightarrow{x},t)^{*}=e^{-i\alpha}\psi(\overrightarrow{x},t)^{*}\end{aligned} \tag{2}$$

という変換の下で不変（形を変えない）である。

この時 Noether カレントは、(2) でαを時空間に依存するパラメタに置き換えることにより

$$S'=\int\psi'(\overrightarrow{x},t)^{*}[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^{2}}{2m}(\frac{\partial}{\partial x^{k}})^{2}-V]\psi'(\overrightarrow{x},t)d^{3}xdt$$

$$= S - \int \left\{ \hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} \psi^* \psi + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[i \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) \right] \right\} d^3 x dt \tag{3}$$

から

$$\begin{aligned} J^\circ(\overrightarrow{x}, t) &= \hbar \psi(\overrightarrow{x}, t)^* \psi(\overrightarrow{x}, t) \\ J^k(\overrightarrow{x}, t) &= i \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \psi(\overrightarrow{x}, t)^* \psi(\overrightarrow{x}, t) - \psi(\overrightarrow{x}, t)^* \frac{\partial}{\partial x^k} \psi(\overrightarrow{x}, t) \right] \end{aligned} \tag{4}$$

のように定義され、このカレントは保存する

$$\partial_\mu J^\mu(\overrightarrow{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} J^\circ(\overrightarrow{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x^k} J^k(\overrightarrow{x}, t) = 0 \tag{5}$$

このように、一般に作用がある連続変換の下で不変である（あるいは対称性を持つ）ときには、常にある保存するカレントと保存量が定義される。

量子異常とは、この Noether の定理が量子効果で変更され成立しない場合として定義される。すなわち、素朴には作用が対称性を持ち従って保存するカレントが存在すると予想されるような理論においても、量子論的に正確に計算すると実は保存則が壊れている場合に対応する。現在存在する量子異常は、場の理論における無限大の自由度の存在と関係しており、したがって、通常の意味での量子力学には量子異常は現れることはない。

3. 発散と量子異常

以上で説明した Noether の定理の異常は場の理論の無限大の自由度の存在と関係しており、従って場の理論における発散の存在とも密接に関係している。しかし、量子異常は発散ともあるいは発散に伴う不定性とも本質的にことなるものである。このことを説明するために、歴史的にも重要な量子電磁力学 (QED) を例にとって説明したい。QED は次の作用で記述される

$$S = \int \left\{ \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right\} d^4 x \tag{6}$$

ただし

$$\partial_\mu \psi(\overrightarrow{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(\overrightarrow{x}, t)$$

である。ここで、ψは 4 成分を持つ Dirac のスピノール場であり、γ^μは 4×4 の Dirac 行列で

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = 2 g^{\mu\nu} \tag{7}$$

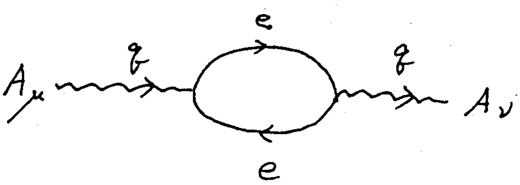
の関係式を満たすものとして定義される。$g^{\mu\nu}$は Minkowski 空間の計量で対角成分のみを持ち、簡単化した記法では

$$g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \tag{8}$$

と書かれる。4 つの添え字を持つベクトル場 A_μは、電磁ポテンシャル (φ, A_1, A_2, A_3) を表す。

(a) 真空分極テンソル

次の Feynman 図で定義される光子の自己エネルギーへの最低次の量子補正$\Pi_{\mu\nu}(g)$ は真空分極テンソルと呼ばれている。



$$= \Pi_{\mu\nu}(g) \tag{9}$$

この Feynman 図は２次の発散をすることが知られている。ただし、理論がもつゲージ不変性から真空分極テンソル$\Pi_{\mu\nu}$は

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0 \tag{10}$$

という条件を満たす必要があり、一般に$\Pi_{\mu\nu}$を

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2) + g_{\mu\nu}\Pi_2(q^2) \tag{11}$$

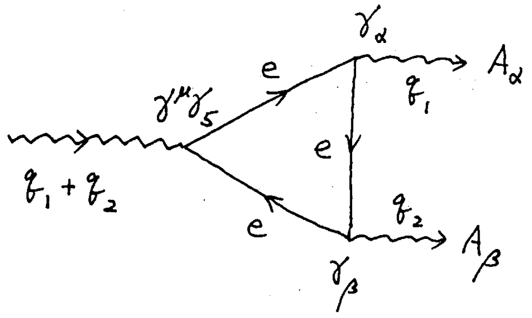
の形に書くとき

$$\Pi_2(q^2) = 0 \tag{12}$$

という条件を満たすことが期待される。(11) の残った$\Pi(q^2)$ は対数的な発散しか含まない。この (10) の条件を満たす計算方法があるか否かが量子電磁力学の建設期には大問題であった。結局 Schwinger がおこなったように、条件 (10) を強制する計算方法が正しい答を出すというところへ議論が落ちついた。ここで重要な点は、原理的に (10) を強制できるか否かであって、このことは現在議論している量子異常と密接に関係している。もし、どのような計算方法を用いても、Lorentz 共変性等を損なわずには (10) をみたすことができない場合には、量子電磁力学のゲージ対称性には量子異常があるといい、この場合には電磁力学のゲージ不変性は量子効果で破れていることになる。実際には種々の計算法により (10) をみたすことができることがわかっており、量子電磁力学のゲージ対称性には量子異常が存在しない。この例からわかるように、Feynman 図の発散と量子異常の存在は基本的に異なる現象といえる。事実、本当に発散する場合には一般にラグランジュアンに適当な相殺項をつけ加えることによりそのような発散を取り除くことが可能であり、量子異常には導かない。

(b) 三角異常項

以上議論してきた光子の自己エネルギー図はフェルミ粒子のループから２本の手足が出ている図であるが、この図の発散の扱いに上記のような問題点が１９４９年当時あった。このため、朝永門下の福田・宮本両氏はこのつぎに複雑な Feynman 図として次のような三角形のグラフの計算を行なった。



$$= \Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}(q_1, q_2) \tag{13}$$

ただし、γ_5は Dirac 理論に現れる 4×4 の行列で次のように定義される。

$$\begin{aligned} &\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &\gamma_5^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\}_+ = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

このγ_5を含む変換はカイラル変換と呼ばれている。(16) のラグランジュアンでいえば、電子の質量をゼロとした作用

$$S = \int \left\{ \bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right\} d^4x \tag{15}$$

は、次のαを定数とするカイラル変換のもとで不変（形を変えない）である

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = \exp[i\alpha\gamma_5]\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\exp[i\alpha\gamma_5] \end{aligned} \tag{16}$$

したがって、Noether の定理から構成される次のカイラル流は保存することが期待される。

$$\begin{aligned} &j_5^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \\ &\partial_\mu j_5^\mu(x) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

しかし、(13) の図の実際の計算から定義される$\Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}$は$\alpha$と$\beta$の足に対するゲージ不変性と$\mu$の足に対するカイラル不変性の両方を同時に満たすことが出来ないことが判明した。すなわち

$$\begin{aligned} &q_1^\alpha \Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}(q_1, q_2) = 0 \\ &q_2^\beta \Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}(q_1, q_2) = 0 \\ &(q_1 + q_2)^\mu \Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}(q_1, q_2) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

である。(18) の最初の二式は電磁相互作用のゲージ不変性を示し、最後の関係式は (17) 式からの予想に反してカイラク対称性に関係したカレント（電流の一般化）は保存しないことを示す。現代的な用語でいうと、量子電磁力学においてはカイラル対称性は量子異常を含むということになる。

実際、(13) の Feynman 図を詳細に分析すると、$\Pi^{(5)}_{\mu,\alpha\beta}$ は見かけ上は一次の発散を含むように見えるが本当は（ゲージ不変性を要請しながら計算すると）発散を含んでいないことがわかる。また、Lorentz 不変性等の基本的な要請をおく限り (18) の三つの条件を同時に満たすことができないことも一般的に示される。これから、量子異常は発散に伴う計算のあいまいさといったものとも本質的に異なることもわかる。

(18) 式の最後の式は具体的には、(17) の Noether カレントを使って

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{e^2}{16\pi^2} \in^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \tag{19}$$

の形に書けることがわかっている。ここで、$\in^{\mu\nu\alpha\beta}$ は時空間の 4 つの添え字に関して完全反対称な（単位）テンソルを表す。

量子異常は、このように摂動論的に理解できる、しかも、場の理論の無限大の自由度の存在と関係した本質的な現象であり、素粒子論では基本的に重要な性質と考えられている。また素粒子論では種々の応用が考えられているがその詳細はここでは割愛したい。